第 39 講　総合問題(7)

1　平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C　を考える．これら 4 点のうち 3 点 A，B，C は同一直線上にあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{1}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　かつ　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}$

であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ を求めよ．

(2)　三角形 OBC の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　平行四辺形OABCにおいて，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，かつ $\angle\mathrm{AOC}=120^\circ$ であるとする．またs，tを実数とし，2点P，Qをそれぞれ　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　と定める．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t を用いて表せ．

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が0のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s を用いて表せ．

(3)　(2)の条件のもとで，さらに点Qが線分OB上にあるような s の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　すべての面が合同な三角形である四面体OABCを考える．この四面体について

$$\mathrm{OA}=\sqrt{3},\ \mathrm{OB}=2,\ \mathrm{OC}=\sqrt{5}$$

とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をそれぞれ求めよ．

(2)　四面体OABCの体積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　総合問題(7)

O を原点とする座標空間上の 3 点を　A(4, 2, 2), B(1, 3, 1), C(1, 1, 3) とする.

(1)　三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である.

(2)　O から平面 ABC に垂線 OH を下ろし, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおくと,

$s=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$, $t=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である. したがって, 四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{キ}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　総合問題(7)

1　平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を考える．これら 4 点のうち 3 点 A，B，C は同一直線上にあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{1}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}$ であるとする．このとき，次の問いに答えよ．

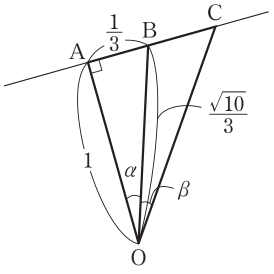
(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ を求めよ．

(2)　三角形 OBC の面積 S を求めよ．

(1)　(i)　A，B，C の順に並ぶとき

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=1$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1+\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$



$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$

つまり　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{BOC}=1$　　よって　$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$，$\angle\mathrm{BOC}=\beta$　とすると　$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

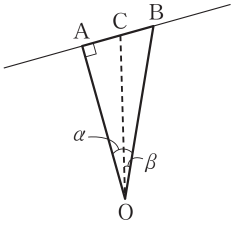
したがって　$\mathrm{AC}=\mathrm{OA}\cdot\tan(\alpha+\beta)=1\cdot\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3}{4}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\mathrm{AC}-\mathrm{AB}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}=\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

(ii)　A，C，B の順に並ぶとき

(i)と同様の手順で $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$　となるが，

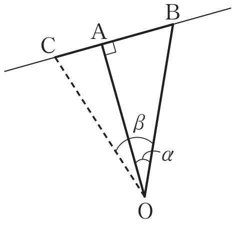
このとき A と C が一致し不適．



(iii)　C，A，B の順に並ぶとき

(i)と同様の手順で　$\tan\alpha=\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ より

A と C が一致し不適．



(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{12}\cdot1=\boldsymbol{\dfrac{5}{24}}$

2　平行四辺形 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，かつ $\angle\mathrm{AOC}=120^\circ$ であるとする．また s，t を実数とし，2 点 P，Q をそれぞれ　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　と定める．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　を t を用いて表せ．

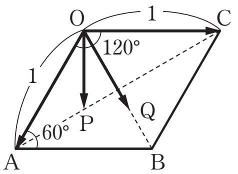
(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が 0 のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s を用いて表せ．

(3)　(2)の条件のもとで，さらに点 Q が線分 OB 上にあるような s の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot1\cdot\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}$　より



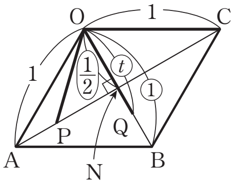
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\{s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}\}\cdot t(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$

$=t\{s|\overrightarrow{OA}|^2+s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)|\overrightarrow{OC}|^2\}$

$=t\left\{s-\dfrac{1}{2}s+(1-s)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(1-s)\right\}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}t}$

（別解）　四角形 OABC はひし形より 2 本の対角線は互いに他を二等分する.

OB と AC の交点を N とすると，$|\overrightarrow{ON}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|$

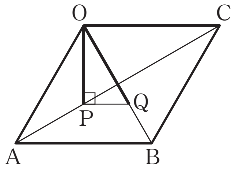


よって　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\angle POB$

$=|\overrightarrow{ON}|\cdot t|\overrightarrow{OB}|=\dfrac{1}{2}t|\overrightarrow{OB}|^2$

ここで　△OAB は正三角形より　$|\overrightarrow{OB}|=1$　　ゆえに　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}t$

(2)　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$　より $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})=0$



ゆえに $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|^2=|s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OC}|^2$

$=s^2|\overrightarrow{OA}|^2+2s(1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-s)^2|\overrightarrow{OC}|^2$

$=s^2-s(1-s)+(1-s)^2=\boldsymbol{3s^2-3s+1}$

(3)　(1)(2)より　$\dfrac{1}{2}t=3s^2-3s+1$　　$t=6s^2-6s+2$

ここで　Q が線分 OB 上にあるとき　$0\leqq t\leqq1$　より $0\leqq6s^2-6s+2\leqq1$

$6s^2-6s+2=6\left(s-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geqq0$　より求める条件は　$6s^2-6s+2\leqq1$

$6s^2-6s+1\leqq0$　　したがって　$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\leqq s\leqq\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}}$

3　すべての面が合同な三角形である四面体 OABC を考える．この四面体について

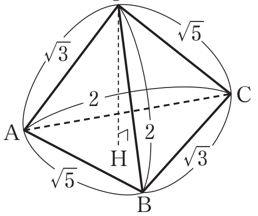
$OA=\sqrt{3}$，$OB=2$，$OC=\sqrt{5}$

とする.

(1)　内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ をそれぞれ求めよ.

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ.

すべての面が合同より　$AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{3}$，$CA=2$



(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{3+4-5}{2}=\mathbf{1}$　　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{4+5-3}{2}=\mathbf{3}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\dfrac{5+3-4}{2}=\mathbf{2}$

(2)　$\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，$\alpha+\beta+\gamma=1$　……①とおく.

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2)\alpha+(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma=0$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$-2\alpha+3\beta+\gamma=0$　……②

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-|\overrightarrow{OA}|^2)\alpha+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(|\overrightarrow{OC}|^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma=0$

よって　$-\alpha+2\beta+3\gamma=0$　……③

①，②，③より　$\alpha=\dfrac{7}{11}$，$\beta=\dfrac{5}{11}$，$\gamma=-\dfrac{1}{11}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{11}(7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

ここで　$|7\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|^2=49\cdot3+25\cdot4+5+70\cdot1-10\cdot3-14\cdot2=264$　より

$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{1}{11}\sqrt{264}=\dfrac{2\sqrt{66}}{11}$

また　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

したがって　四面体OABCの体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{66}}{11}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　総合問題(7)

O を原点とする座標空間上の 3 点を　A(4, 2, 2), B(1, 3, 1), C(1, 1, 3) とする.

(1)　三角形 ABC の面積は [ア]$\sqrt{[イ]}$　である.

(2)　O から平面 ABC に垂線 OH を下ろし, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおくと,

$s=\dfrac{[ウ]}{[エ]}$, $t=\dfrac{[オ]}{[カ]}$ である. したがって, 四面体 OABC の体積は [キ] である.

(1)　$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,\ -1,\ 1)$ より

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9-1-1=7$　　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

よって △ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{11\cdot11-49}=\frac{1}{2}\sqrt{72}=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

(2)　$\overrightarrow{OA}=(4,\ 2,\ 2)$ より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=-12+2-2=-12$　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=-12-2+2=-12$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12+11s+7t=0\end{aligned}$$

よって　$11s+7t=12$　…①

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=-12+7s+11t=0\end{aligned}$$

よって　$7s+11t=12$　…②

①, ②より　$s=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$, $t=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\{3(4,\ 2,\ 2)+2(-3,\ 1,\ -1)+2(-3,\ -1,\ 1)\}$

$=\dfrac{1}{3}(0,\ 6,\ 6)=(0,\ 2,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

したがって四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot3\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}=\mathbf{4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。